

Παράρτημα Ι

Βασικές μαθηματικές έννοιες

Π1.1 Στοιχεία μιγαδικών συναρτήσεων

Μία **μιγαδική μεταβλητή** s έχει δύο συνιστώσες: την πραγματική συνιστώσα σ και τη φανταστική ω . Οι συνιστώσες αυτές παρίστανται γραφικά στο **μιγαδικό επίπεδο** ή s -επίπεδο έτσι ώστε η πραγματική συνιστώσα αντιστοιχεί στον οριζόντιο άξονα και η φανταστική συνιστώσα αντιστοιχεί στον κατακόρυφο άξονα. Επομένως, η μιγαδική μεταβλητή ορίζεται από τις συντεταγμένες της και είναι $s = \sigma + j\omega$.

Η συνάρτηση $G(s)$ λέγεται **συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής** s , αν για κάθε τιμή της s υπάρχουν μία ή περισσότερες τιμές της $G(s)$. Επειδή η s ορίζεται από το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της, η συνάρτηση $G(s)$ έχει και αυτή πραγματικό και φανταστικό μέρος και παρίσταται γραφικά στο μιγαδικό επίπεδο με βάση τις συντεταγμένες της, δηλαδή, $G(s) = \text{Re}[G(s)] + j \text{Im}[G(s)]$. Στην απεικόνιση αυτή $\text{Re}[G(s)]$ και $\text{Im}[G(s)]$ είναι, αντίστοιχα, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $G(s)$.

Μια συνάρτηση $G(s)$ της μιγαδικής μεταβλητής s λέγεται **αναλυτική συνάρτηση** σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, αν τόσο η συνάρτηση, όσο και όλες οι παράγωγοί της υπάρχουν (ορίζονται) στην περιοχή αυτή. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου εκτός από τα σημεία $s = 0$ και $s = -1$. Στα σημεία αυτά η τιμή της συνάρτησης είναι άπειρο. Αντίθετα, η συνάρτηση

$$G(s) = s + 2$$

είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του πεπερασμένου μιγαδικού επιπέδου.

Τα **ανώμαλα σημεία** μιας μιγαδικής συνάρτησης είναι εκείνα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση ή οι παράγωγοί της. Ένας **πόλος**, δηλαδή σημείο στο οποίο μηδενίζεται ο παρονομαστής μιας μιγαδικής συνάρτησης, είναι η πιο συνηθισμένη περίπτωση ανώμαλου σημείου. Τα μηδενικά μιας μιγαδικής συνάρτησης είναι εκείνα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία μηδενίζεται ο αριθμητής της συνάρτησης.

Π1.2 Ο μετασχηματισμός Laplace

Ο **μετασχηματισμός Laplace** είναι ένας γενικευμένος γραμμικός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός και έχει ιδιαίτερη σημασία στη μελέτη των συστημάτων επειδή παρέχει τη δυνατότητα μετάβασης από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας και αντίστροφα. Επιπλέον, ο μετασχηματισμός Laplace, ως μαθηματικό εργαλείο, επιτρέπει την εύκολη επίλυση γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Το πλεονέκτημα αυτό οφείλεται στα εξής χαρακτηριστικά του:

- Τόσο η ομογενής εξίσωση, όσο και η μη ομογενής επιλύονται με μία και μόνο πράξη.
- Ο μετασχηματισμός Laplace μετατρέπει τη διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική ως προς s , η οποία κατόπιν επιλύεται εύκολα με απλούς αλγεβρικούς κανόνες και προκύπτει η λύση στο πεδίο της μιγαδικής συχνότητας s . Η λύση στο πεδίο του χρόνου προκύπτει από τον **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace**.

Ορισμός Π1.2.1

Έστω μία πραγματική συνάρτηση $f(t)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

για κάποιο πεπερασμένο πραγματικό αριθμό σ , ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ ορίζεται ως η συνάρτηση

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Συμβολίζοντας $\mathcal{L}[\cdot]$ το μετασχηματισμό, μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

Η μεταβλητή s , γνωστή και ως μεταβλητή Laplace, είναι μια μιγαδική μεταβλητή και επομένως γράφεται $s = \sigma + j\omega$.

Ορισμός Π1.2.2

Έστω η μετασχηματισμένη κατά Laplace συνάρτηση $F(s)$. Η ανάκτηση της $f(t)$ πραγματοποιείται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F(s)e^{st} ds$$

και συμβολίζεται

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

Π1.2.1 Θεωρήματα του μετασχηματισμού Laplace

Μερικές σημαντικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace, οι οποίες διευκολύνουν την εφαρμογή του, δίνονται στη συνέχεια υπό μορφή Θεωρημάτων, χωρίς τις αντίστοιχες αποδείξεις.

Θεώρημα Π1.2.3: Πολλαπλασιασμός επί μια σταθερή ποσότητα

Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)$ και k μία σταθερά. Τότε

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$$

Θεώρημα Π1.2.4: Αλγεβρικό άθροισμα

Έστω $F_1(s)$ και $F_2(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$, αντίστοιχα. Τότε

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

Θεώρημα Π1.2.5: Διαφόριση

Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)$ και έστω $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$. Ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου της $f(t)$, ως προς το χρόνο, είναι

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

Η γενική περίπτωση είναι

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

όπου $f^{(i)}(0)$ συμβολίζει την παράγωγο i τάξης της $f(t)$, ως προς το χρόνο, στο σημείο $t=0$.

Θεώρημα Π1.2.6: Ολοκλήρωση

Ο μετασχηματισμός Laplace του ολοκληρώματος της συνάρτησης $f(t)$, ως προς το χρόνο, είναι

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

Η περίπτωση πολλαπλής ολοκλήρωσης είναι

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\dots\int_0^{t_n} f(\tau)d\tau dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

Θεώρημα Π1.2.7: Χρονική μετατόπιση

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)$ με χρονική καθυστέρηση a είναι

$$\mathcal{L}[f(t-a)u_s(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

όπου $u_s(t-a)$ είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση με χρονική καθυστέρηση a .

Θεώρημα Π1.2.8: Θεώρημα της αρχικής τιμής

Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)$. Τότε

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

εφόσον υπάρχει το όριο.

Θεώρημα Π1.2.9: Θεώρημα της τελικής τιμής

Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)$. Αν η $sF(s)$ είναι αναλυτική στον άξονα των φανταστικών αριθμών και στο δεξιό μιγαδικό ημι-επίπεδο, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Θεώρημα Π1.2.10: Μετατόπιση συχνότητας

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $f(t)$ πολλαπλασιασμένος επί e^{-at} , όπου a είναι μία σταθερά, είναι

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

Θεώρημα Π1.2.10: Συνέλιξη

Έστω $F_1(s)$ και $F_2(s)$ οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$, αντίστοιχα. Έστω ακόμη ότι $f_1(t) = f_2(t) = 0$, για $t < 0$. Τότε

$$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau\right]$$

όπου "*" συμβολίζει τη συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου. Αντίστοιχα, ισχύει και

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = F_1(s) * F_2(s)$$

Πίνακας Π1.1. Ζεύγη μετασχηματισμού Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	Μοναδιαίος παλμός $\delta(t)$	1
2	Μοναδιαία βηματική $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{1}{s^n}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
8	$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
9	$\frac{1}{ab} \left[1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
12	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
13	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
15	$-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$
16	$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$ $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$

Πίνακας Π1.2. Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

1	$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$
2	$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
3	$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
4	$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}$
5	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$
6	$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \quad \text{εάν υπάρχει το } \int_0^\infty f(t)dt$
7	$\mathcal{L}\left[e^{-at}f(t)\right] = F(s+a)$
8	$\mathcal{L}\left[f(t-a)u_s(t-a)\right] = e^{-as}F(s) \quad a \geq 0$
9	$\mathcal{L}\left[tf(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}$
10	$\mathcal{L}\left[t^2f(t)\right] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$
11	$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \quad n=1,2,3,\dots$
12	$\mathcal{L}\left[\frac{1}{t}f(t)\right] = \int_s^\infty F(s)ds \quad \text{εάν υπάρχει το } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}f(t)$
13	$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$
14	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$
15	$\mathcal{L}\left[f(t)g(t)\right] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p)dp$

Π1.2.2 Ανάπτυξη σε απλά κλάσματα

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ρητών συναρτήσεων υπολογίζεται εύκολα αν αυτές αναπτυχθούν σε άθροισμα απλών κλασμάτων. Με τον τρόπο αυτό ο υπολογισμός ανάγεται στην εύρεση των επί μέρους αντίστροφων μετασχηματισμών Laplace ρητών συναρτήσεων πρώτης ή δεύτερης τάξης που δίνονται στους γνωστούς **Πίνακες Μετασχηματισμού Laplace** (Πίν. 1.1 και 1.2).

Έστω ότι ο μετασχηματισμός Laplace μιας διαφορικής εξίσωσης είναι ρητή συνάρτηση ως προς s και γράφεται

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

όπου $N(s)$ και $D(s)$ είναι πολυώνυμα ως προς s , τέτοια ώστε ο βαθμός του αριθμητή $N(s)$ να είναι μικρότερος ή ίσος από το βαθμό του παρονομαστή $D(s)$. Υποθέτοντας ότι ο βαθμός του παρονομαστή είναι n , μπορεί να γραφεί

$$D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

όπου a_{n-1}, \dots, a_0 είναι πραγματικοί συντελεστές. Η ανάπτυξη της ρητής συνάρτησης σε απλά κλάσματα εξετάζεται για δύο περιπτώσεις: (α) την περίπτωση που η $G(s)$ έχει πραγματικούς και διακεκριμένους πόλους και (β) την περίπτωση που η $G(s)$ έχει πολλαπλούς ή μιγαδικούς πόλους.

(α) Αν η $G(s)$ έχει **πραγματικούς και διακεκριμένους πόλους**, μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)}$$

όπου $s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_n$. Στην περίπτωση αυτή, αναπτύσσεται σε απλά κλάσματα με τη μορφή

$$G(s) = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_n}{s + s_n}$$

Οι συντελεστές K_1, K_2, \dots, K_n προσδιορίζονται εξισώνοντας, εκ ταυτότητας, τους συντελεστές των ομοιόβαθμων όρων των αριθμητών, στις δύο εκφράσεις της $G(s)$.

(β) Αν η $G(s)$ έχει **πολλαπλούς ή μιγαδικούς πόλους** και υπάρχουν σ' αυτή ρ ταυτόσημοι πόλοι στο σημείο $s = s_i$ (ή ένας πόλος με πολλαπλότητα ρ στο σημείο $s = s_i$), τότε η $G(s)$ γράφεται

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_{n-\rho})(s + s_i)^\rho}$$

όπου $i \neq 1, 2, \dots, n - \rho$. Η ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα είναι

$$G(s) = \frac{K_1}{s + s_1} + \frac{K_2}{s + s_2} + \dots + \frac{K_{n-\rho}}{s + s_{n-\rho}} + \frac{A_1}{s + s_i} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \dots + \frac{A_\rho}{(s + s_i)^\rho}$$

Π1.3 Στοιχεία γραμμικής άλγεβρας

Π1.3.1 Διανύσματα και πίνακες

Στη σύγχρονη θεωρία συστημάτων πολύ συχνά χρησιμοποιούνται **διανύσματα** και **πίνακες** για να γραφούν με απλούστερο τρόπο σύνθετες μαθηματικές εκφράσεις. Ένα τυπικό παράδειγμα αποτελεί το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

[illegible]

το οποίο γράφεται σε διανυσματική μορφή

$$Ax = y$$

όπου A είναι πίνακας διάστασης $n \times n$ με σταθερά στοιχεία και x, y είναι διανύσματα διάστασης $n \times 1$. Δηλαδή,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες και τα διανύσματα είναι διατάξεις στοιχείων μέσα σε άγκιστρα. Έτσι, πολλές φορές γράφουμε

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$$

Η **ορίζουσα** ενός πίνακα A είναι και αυτή μια διάταξη στοιχείων μέσα σε άγκιστρα, τα οποία όμως είναι διαφορετικά:

$$|A| = |a_{ij}|$$

Ορίζουσα έχουν μόνο οι πίνακες με ίσο αριθμό γραμμών και στηλών ($m = n$). Ακόμη, η ορίζουσα ενός πίνακα έχει συγκεκριμένη τιμή, πράγμα που δεν ισχύει για τους πίνακες.

Ειδικότερα, ορίζονται τα εξής:

- **Πίνακας** είναι μία διάταξη βαθμωτών μεγεθών a_{ij} , τα οποία ανήκουν σε ένα σώμα. Συνεπώς, ένας πίνακας ορίζεται επάνω σε ένα σώμα (π.χ. το σώμα των πραγματικών αριθμών για $a_{ij} \in \mathbb{R}$, των μιγαδικών αριθμών για $a_{ij} \in \mathbb{C}$, κ.λπ.).
- Ένας πίνακας έχει **διάσταση** $m \times n$, όπου m είναι ο αριθμός των γραμμών και n είναι ο αριθμός των στηλών του. Αν $m=1$, ο πίνακας λέγεται **διάνυσμα γραμμής**. Αν $n=1$, ο πίνακας λέγεται **διάνυσμα στήλης**.
- Ένας **τετραγωνικός** πίνακας έχει ίσο αριθμό γραμμών και στηλών $m = n$.
- **Διαγώνιος** πίνακας είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά, εκτός από τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου.
- **Μοναδιαίος** πίνακας είναι ένας διαγώνιος πίνακας, του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα με τη μονάδα.
- **Μηδενικός** πίνακας είναι αυτός, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά.
- **Ομαλός** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου η ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός.
- **Ανάστροφος** ενός πίνακα $A = [a_{ij}]$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από την αντιμετάθεση γραμμών και στηλών του A και συμβολίζεται $A^T = [a_{ji}]$. Χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

- **Συζυγής ανάστροφος** του A είναι ο πίνακας $A^* = [\bar{a}_{ji}]$, όπου \bar{a}_{ji} είναι το συζυγές στοιχείο του a_{ji} .
- **Άνω τριγωνικός** πίνακας είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, του οποίου $a_{ij} = 0$, για $i > j$. **Κάτω τριγωνικός** λέγεται ένας πίνακας, αν $a_{ij} = 0$, για $i < j$.
- **Συμμετρικός** είναι ένας πίνακας, όταν $a_{ij} = a_{ji}$ ή $A = A^T$.
- **Αντισυμμετρικός** είναι ένας πίνακας, όταν $a_{ij} = -a_{ji}$ ή $A = -A^T$.
- **Ερμιτιανός** είναι ένας πίνακας, όταν $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ ή $A = A^*$.

- **Αντιερμιτιανός** είναι ένας πίνακας, όταν $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ ή $A = -A^*$.
- **Ορθογώνιος** είναι ένας πίνακας όταν $AA^T = I$
- **Συζυγής ορθογώνιος** είναι ένας πίνακας όταν $AA^* = I$
- **Τρχνος** ενός πίνακα είναι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του.
- **Τάξη** ενός πίνακα είναι η διάσταση του μεγαλύτερου τετραγωνικού ομαλού υπο-πίνακά του.

Π1.3.2 Πράξεις πινάκων

Πρόσθεση πινάκων: Έστω $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ με ίσες διαστάσεις $m \times n$. Το άθροισμα $A + B$ είναι ένας πίνακας διάστασης $m \times n$ με στοιχεία ίσα με το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων, δηλαδή, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Πολλαπλασιασμός πινάκων: Έστω $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ με διαστάσεις $m \times n$ και $n \times p$, αντίστοιχα. Το γινόμενο AB είναι ένας πίνακας $C = [c_{ij}]$ διάστασης $m \times p$, όπου $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

Πολλαπλασιασμός σταθεράς επί πίνακα: Έστω $A = [a_{ij}]$ και μία σταθερά k . Τότε $kA = [ka_{ij}]$.

Διαφόριση πινάκων: Έστω $A = [a_{ij}(t)]$, $B = [b_{ij}(t)]$ και $f(t)$ μία βαθμωτή συνάρτηση. Τότε,

$$\frac{d}{dt} A(t) = \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t) \right]$$

$$\frac{d}{dt} f(t)A(t) = \frac{df(t)}{dt} A(t) + f(t) \frac{dA(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} [A(t) + B(t)] = \frac{dA(t)}{dt} + \frac{dB(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)] = \frac{dA(t)}{dt}B(t) + A(t)\frac{dB(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\left[\frac{d}{dt}A(t)\right]A^{-1}(t)$$

Ολοκλήρωση πινάκων: Έστω $A = [a_{ij}(t)]$. Τότε,

$$\int A(t)dt = \left[\int a_{ij}(t)dt \right]$$

Ορίζουσα ενός πίνακα: Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας πίνακας διάστασης $n \times n$. Η ορίζουσα του A , που συμβολίζεται $|A|$ ή $\det(A)$, είναι μία βαθμωτή ποσότητα και υπολογίζεται ως εξής:

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij}c_{ij}, \quad j=1, \text{ ή } 2, \text{ ή } \dots, n$$

(ανάπτυξη κατά στήλη)

ή

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{ij}, \quad i=1, \text{ ή } 2, \text{ ή } \dots, n$$

(ανάπτυξη κατά γραμμή)

όπου c_{ij} είναι το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

και M_{ij} είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ τετραγωνικός πίνακας που παραμένει από τον A , αν αφαιρεθεί η i -στή γραμμή και η j -στή στήλη.

Ορίζουσα γινομένου πινάκων: Έστω $B = A_1 A_2 \dots A_m$. Τότε ισχύει

$$|B| = |A_1| |A_2| |A_3| \dots |A_m|$$

Αντίστροφος πίνακας: Έστω A ένας $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας. Ο αντίστροφος του A^{-1} είναι αυτός που εξασφαλίζει ότι

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

και υπολογίζεται από τη σχέση

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{[c_{ij}]^T}{|A|}$$

Ο πίνακας $Adj(A)$ έχει ως στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα του A και ονομάζεται **συμπληρωματικός**.

Έστω $B = A_1 A_2 \dots A_m$. Τότε ισχύει

$$B^{-1} = A_m^{-1} A_{m-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Π1.3.3 Διανυσματικοί χώροι

Τα διανύσματα ορίζουν ειδικούς **γραμμικούς χώρους** και τα στοιχεία τους παίρνουν τιμές από συγκεκριμένα **σώματα αριθμών**. Οι έννοιες αυτές παρουσιάζονται εκτενέστερα στην παράγραφο αυτή.

- **Σύνολο** λέγεται μια συλλογή στοιχείων
- **Σώμα** λέγεται ένα σύνολο C , στο οποίο έχουν οριστεί οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Οι πράξεις αυτές διέπονται από τις εξής ιδιότητες:
 1. Σε κάθε δύο στοιχεία x και y του C αντιστοιχούν άλλα δύο στοιχεία του C : τα $x+y$ και $x.y$. Το στοιχείο $x+y$ λέγεται **άθροισμα** των x και y , ενώ το στοιχείο $x.y$ λέγεται **γινόμενο** των x και y
 2. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι **προσεταιριστικές** πράξεις, δηλαδή, αν $x, y, z \in C$, τότε $x+(y+z)=(x+y)+z$ και $x.(y.z)=(x.y).z$
 3. Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός είναι **αντιμεταθετικές** πράξεις, δηλαδή, αν $x, y, z \in C$, τότε $x+y=y+x$ και $x.y=y.x$
 4. Ο πολλαπλασιασμός είναι **επιμεριστικός**, ως προς την πρόσθεση, δηλαδή, αν $x, y, z \in C$, τότε $x.(y+z)=x.y+x.z$ και $(x+y).z=x.z+y.z$
 5. Υπάρχει **μηδενικό στοιχείο**, τέτοιο ώστε $\forall x \in C$ να ισχύει $x+0=0+x=x$
 6. Υπάρχει **μοναδιαίο στοιχείο**, τέτοιο ώστε $\forall x \in C$ να ισχύει $x.1=1.x=x$
 7. Για κάθε στοιχείο $\forall x \in C$ υπάρχει το **αντίθετο στοιχείο** $y=-x$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x+y=0$

8. Για κάθε στοιχείο $\forall x \in C$ υπάρχει το **αντίστροφο στοιχείο** $y = x^{-1}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x \cdot y = 1$
- Το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών αποτελεί το **σώμα των πραγματικών αριθμών**. Το σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών, μαζί με την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των μιγαδικών αριθμών, αποτελεί το **σώμα των μιγαδικών αριθμών**
 - **Υποσώμα** ενός σώματος λέγεται ένα υποσύνολο του C , του οποίου τα στοιχεία αποτελούν σώμα. Είναι προφανές ότι το \mathbb{R} είναι υποσώμα του \mathbb{C}
 - **Προσθετική ομάδα του Abel** (ή αβελιανή ομάδα) λέγεται ένα σύνολο S , στο οποίο ορίζεται η πράξη της πρόσθεσης έτσι ώστε:
 1. Σε κάθε ζεύγος στοιχείων $x, y \in S$ αντιστοιχεί ένα στοιχείο $x + y$ που λέγεται άθροισμα των x και y
 2. Η πρόσθεση είναι προσεταιριστική, δηλαδή, για $x, y, z \in S$ ισχύει $x + (y + z) = (x + y) + z$
 3. Η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, δηλαδή, για $x, y \in S$, ισχύει $x + y = y + x$
 4. Υπάρχει μηδενικό στοιχείο, τέτοιο ώστε $\forall x \in S$ να ισχύει $x + 0 = 0 + x = x$
 5. Για κάθε στοιχείο $\forall x \in S$ υπάρχει το αντίθετο στοιχείο $y = -x$, τέτοιο ώστε να ισχύει $x + y = 0$
 - Είναι προφανές ότι κάθε σώμα είναι και προσθετική ομάδα του Abel (ή αβελιανή ομάδα)
 - Ένας **διανυσματικός χώρος** (ή γραμμικός χώρος) ορίζεται από μία προσθετική ομάδα του Abel S , της οποίας τα στοιχεία λέγονται **διανύσματα**, και ένα σώμα C , του οποίου τα στοιχεία λέγονται **βαθμωτά μεγέθη**, για τα οποία υπάρχει η πράξη του (βαθμωτού) πολλαπλασιασμού με τις εξής ιδιότητες:
 1. Αν $x \in S$ και $\lambda \in C$, το γινόμενο $\lambda \cdot x \in S$ και είναι αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού
 2. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση στην S , δηλαδή, $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$
 3. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση στο C , δηλαδή, $(\lambda_1 + \lambda_2)x = \lambda_1 x + \lambda_2 x$

4. Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός, δηλαδή,
 $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot x = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot x)$
 5. Για $\forall x \in S$ ισχύει η σχέση $1 \cdot x = x$, δηλαδή 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του C
- Ο διανυσματικός (ή γραμμικός) χώρος συμβολίζεται με (S, C)
 - Αν C είναι το σώμα των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , τότε ο χώρος λέγεται **πραγματικός διανυσματικός χώρος**. Αντίστοιχα, αν C είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} , τότε ο χώρος λέγεται **μιγαδικός διανυσματικός χώρος**.

Βάσεις διανυσματικών χώρων: Έστω ο διανυσματικός χώρος (S, C) και έστω ένα σύνολο Δ αποτελούμενο από n διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$. Τα διανύσματα αυτά λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα**, αν υπάρχουν n βαθμωτά μεγέθη $a_1, a_2, \dots, a_n \in C$ και δεν είναι όλα μηδενικά, έτσι ώστε

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = 0$$

Αν δεν πληρούται η συνθήκη αυτή, τα $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα**. Με άλλα λόγια, τα διανύσματα x_1, x_2, \dots, x_n λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνον αν η συνθήκη ισχύει για $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Έστω το σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Τότε,

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = x$$

Το σύνολο των x που προκύπτει για όλες τις τιμές των a_1, a_2, \dots, a_n συμβολίζεται με $[\Delta]$ και παράγεται από το Δ , ενώ το Δ παράγει το $[\Delta]$.

Έστω ο διανυσματικός χώρος (S, C) . Ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\Delta \subset S$, που παράγει όλο τον διανυσματικό χώρο, λέγεται **βάση** του διανυσματικού χώρου. Σε ένα διανυσματικό χώρο υπάρχουν πολλές διαφορετικές βάσεις και έχουν όλες τον ίδιο αριθμό διανυσμάτων που λέγεται **διάσταση** του χώρου. Ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

- Σε ένα n -διάστατο διανυσματικό χώρο, κάθε σύνολο n γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων αποτελεί βάση του χώρου
- Έστω $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ μία βάση του διανυσματικού χώρου (S, C) . Για κάθε διάνυσμα $x \in S$, υπάρχει ένας μοναδικός συνδυασμός τιμών των a_1, a_2, \dots, a_n , για τις οποίες ισχύει $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = x$

- Αν στο διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ τα διανύσματα x_1, x_2, \dots, x_n της βάσης είναι μοναδιαία, τότε τα a_1, a_2, \dots, a_n αποτελούν τις συντεταγμένες του διανύσματος x

Αλλαγή βάσης: Έστω δύο βάσεις $\Delta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και $\Delta' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ του διανυσματικού χώρου (S, \mathbb{R}) . Έστω ότι ένα διάνυσμα $\xi \in S$ εκφράζεται ως προς τη βάση Δ από τη σχέση

$$\xi = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i a_i$$

και ως προς τη βάση Δ' από τη σχέση

$$\xi = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & \cdots & x'_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n x'_j a'_j$$

Κάθε x'_j μπορεί να εκφραστεί ως προς τη βάση Δ από τη σχέση

$$x'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} x_i$$

και επομένως

$$\xi = \sum_{j=1}^n a'_j \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} x_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} a'_j \right) x_i$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$a_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} a'_j$$

Η σχέση αυτή γράφεται υπό μορφή πινάκων

$$A = PA'$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{bmatrix}$$

και ο πίνακας P λέγεται πίνακας μεταφοράς από τη βάση Δ' στη βάση Δ .

Νόρμες: Σε κάθε γραμμικό διανυσματικό χώρο μπορεί να οριστεί μία νόρμα ως εξής: σε κάθε διάνυσμα $x \in S$ του διανυσματικού χώρου (S, C) αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται $\|x\|$ και λέγεται νόρμα του x , αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$, αν και μόνον αν $x = 0$
2. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$
3. $\|ax\| = |a|\|x\|$

Η νόρμα του x είναι μία γενίκευση της έννοιας του μήκους του x . Οι γραμμικοί χώροι για τους οποίους ενδιαφερόμαστε εδώ είναι οι $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ και $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Έστω το διάνυσμα $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ του χώρου $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ή του $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Μερικές νόρμες του x στους χώρους αυτούς ορίζονται ως εξής:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2}$ Ευκλείδεια νόρμα (μήκος)
- $\|x\|_3 = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$

Ανάλογα ορίζονται οι νόρμες ενός πίνακα A , διαστάσεων $n \times m$.

- $\|A\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$
- $\|A\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}$

Αν οριστεί η νόρμα $\|x\|$ στο διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ή στον $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$, τότε η νόρμα του διανυσματικού χώρου των πραγματικών ή των μιγαδικών πινάκων ορίζεται ως εξής:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Αν A και B είναι δύο πίνακες, τότε

$$\|A.B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Π1.3.4 Τετραγωνικές μορφές

Τετραγωνική μορφή λέγεται κάθε πολυώνυμο της μορφής

$$p(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

όπου τα στοιχεία a_{ij} του πίνακα A , καθώς και τα στοιχεία x_i του διανύσματος x είναι πραγματικοί αριθμοί.

Στη γενική περίπτωση η τιμή της τετραγωνικής μορφής εξαρτάται από το διάνυσμα x . Υπάρχουν, όμως, οι εξής ειδικές περιπτώσεις:

- Μία τετραγωνική μορφή $p(x)$ λέγεται **θετικά ορισμένη**, αν $p(x) > 0$, $\forall x \neq 0$ και $p(0) = 0$
- Μία τετραγωνική μορφή $p(x)$ λέγεται **αρνητικά ορισμένη**, αν $p(x) < 0$, $\forall x \neq 0$ και $p(0) = 0$
- Μία τετραγωνική μορφή $p(x)$ λέγεται **θετικά ημιορισμένη**, αν $p(x) \geq 0$, $\forall x \neq 0$ και $p(0) = 0$
- Μία τετραγωνική μορφή $p(x)$ λέγεται **αρνητικά ημιορισμένη**, αν $p(x) \leq 0$, $\forall x \neq 0$ και $p(0) = 0$
- Μία τετραγωνική μορφή $p(x)$ λέγεται **αόριστη**, αν δεν ανήκει σε καμία από τις παραπάνω κατηγορίες. Μία αόριστη τετραγωνική μορφή παίρνει, τόσο θετικές, όσο και αρνητικές τιμές.

Ένας **συμμετρικός** πίνακας A είναι **θετικά ορισμένος** (ή ημιορισμένος) ή **αρνητικά ορισμένος** (ή ημιορισμένος) ή **αόριστος**, αν η τετραγωνική μορφή

$$p(x) = x^T A x$$

είναι, αντίστοιχα, θετικά ορισμένη (ή ημιορισμένη) ή αρνητικά ορισμένη (ή ημιορισμένη) ή αόριστη.

Είναι γνωστό ότι ένας συμμετρικός πίνακας έχει μόνο **πραγματικές ιδιοτιμές**. Από το γεγονός αυτό απορρέουν τα εξής κριτήρια:

- Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι **θετικά ορισμένος**, αν και μόνον αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές
- Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι **αρνητικά ορισμένος**, αν και μόνον αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές
- Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι **θετικά ημιορισμένος**, αν και μόνον αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι θετικές και μία τουλάχιστον είναι μηδενική
- Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι **αρνητικά ημιορισμένος**, αν και μόνον αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι αρνητικές και μία τουλάχιστον είναι μηδενική
- Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι **αόριστος**, αν έχει θετικές και αρνητικές ιδιοτιμές